

Om geometriska representationen af Logarithmer och de
enklaste Trigonometriska Funktioner af en
Complex Variabel.

Akademisk Afhandling,

som, med tillstånd af

Vidtberömda Philosophiska Faculteten i Lund,

till offentlig granskning framställes

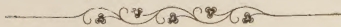
af

Mac Berlin,

Philos. Dr., Skån.,

å Auditoriet N:o 1, Onsdagen den 3 Februari 1869

kl. $\frac{1}{2}$ 3 e. m.



Lund,

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1869.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552409_0089

Logarithmer.

Liksom vid fråga om reella storheter måste äfven, då man har att behandla complexa storheter, eqvationen $\alpha^w = z$ betraktas såsom definition för $w = \log_{(\alpha)}(z)$, så att hvarje w -värde, som satisfierar samma eqvation, är en logarithm för z i det system, hvars bas är α . Vi vilja redan från början taga saken så generellt, att äfven den logarithmiska basen α är en complex storhet, låt vara $r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$. Vidare sätta vi $w = u + vi$ och $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Genom att införa dessa uttryck får man eqvationen $\alpha^w = z$ att antaga formen

$$(r_1 \cdot e^{i\varphi_1})^{u+vi} = r \cdot e^{i\varphi}.$$

I vår afhandling "Om potenser etc." sid. 20 härledde vi ur eqvationen $w = z^{a+bi}$, eller

$$\varrho \cdot e^{i\psi} = (r \cdot e^{i\varphi})^{a+bi},$$

hvilken endast derigenom skiljer sig från den ofvan framställda, att den constante, den oberoende och den beroende variable blifvit cykliskt ombytta, genom att taga naturliga logarithmerna för båda membra och derefter skilja det reella från det imaginära, följande tvenne:

$$\log \varrho = a \cdot \log r - b\varphi \quad \text{och} \quad \psi = b \cdot \log r + a\varphi.$$

Häremot gjordes den anmärkningen, att, emedan logaritmen är en mångtydig funktion, de båda sist framställda eqvationerna ej vore fullt rigtiga, utan att en arbiträr constant borde tilläggas. På grund häraf vilja vi göra eqvationen

$$\varrho \cdot e^{i\psi} = (r \cdot e^{i\varphi})^{a+bi}$$

till föremål för en noggrannare undersökning. I stället för r kan man tydligen införa $e^{\log r}$, hvarest med $\log r$ menas den *reella* naturliga logaritmen för r . Man har då

$$\varrho \cdot e^{i\psi} = e^{\log r (a+bi) + i\varphi (a+bi)} = e^{a \log r - b\varphi} \cdot e^{(b \log r + a\varphi)i}.$$

Då tvenne complexa storheter äro lika, så bestämma de samma punkt i planet, och följaktligen äro deras radii vectores lika, och deras anomalier antingen lika eller åtskilda genom storheten $\pm 2m\pi$, hvarest m betyder hvilket helt tal man behagar. Vi hafva således

$$\varrho = e^{a \log r - b\varphi},$$

eller, om vi taga de *reella* logaritmerna för dessa båda reella och positiva storheter,

$$\log \varrho = a \cdot \log r - b\varphi, \text{ samt}$$

$$\psi = b \cdot \log r + a\varphi \pm 2m\pi.$$

Och här är $\pm 2m\pi$ den ofvannämnda arbiträra constanten. Emellertid hade vi i denna vår afhandling blott gjort oss till uppgift att bestämma *läget* i det complexa storhetsplanet för den storhet w , hvars radius vector är ϱ och anomali ψ , och detta *läge* är tydligen ett och detsamma, om ψ erhåller tillskottet $\pm 2m\pi$ eller icke. Denne arbiträre constant var således för vårt ändamål alldeles likgiltig och kunde med fullt fog utlemnas. Också representera tydligen t. ex. eqvationerna

$$\varrho = C \cdot e^{-\frac{b}{a}\psi}, \text{ och } \varrho = C \cdot e^{-\frac{b}{a}(\psi \pm 2m\pi)}$$

geometriskt en och samma curva.

Återgå vi härefter till eqvationen

$$(r_1 \cdot e^{i\varphi_1})^{u+vi} = r \cdot e^{i\varphi},$$

så erhålla vi på alldeles samma sätt ur den

$$\log r = u \cdot \log r_1 - v\varphi_1, \text{ och } \varphi = v \cdot \log r_1 + u\varphi_1 \pm 2m\pi.$$

Äfven här är utsättandet af termen $\pm 2m\pi$ alldeles öfverflödigt, emedan samma mångtydighet, som skulle införas genom dess utsättande, redan förut ligger i φ sjelft. Eller vi behöfva blott skrifva

$$\varphi = v \cdot \log r_1 + u\varphi_1$$

och liksom i vår nyssnämnde afhandling fasthålla den observationen, att anomalien för en viss punkt i planet (z) icke blott är φ , utan i allmänhet $\varphi \pm 2m\pi$, om φ betyder den båge, som ligger *emellan* fundamental-axeln och radius vector.

Beskrifver nu den oberoende variable z en viss curva, hvars eqvation i polar-coordinater är gifven, så har man blott att i denna eqvation införa de ofvan bestämda värdena på $\log r$ och φ , för att erhålla w -curvans eqvation i rätliniga, rätvinkliga coordinater. Denna eqvation blir betydligt förenklad, om man hänför den till transformerade axlar. Låter man nemligen axlarne vrida sig åt *höger* en vinkel $\vartheta = \arctg \frac{\varphi_1}{\log r_1}$, hvaraf

$$\sin \vartheta = \frac{\varphi_1}{+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2} \text{ och } \cos \vartheta = \frac{\log r_1}{+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2} \text{ } ^1),$$

och betecknar den nya abscissan med U och den nya ordinatan med V , så är

$$U = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta = \frac{u \log r_1 - v \varphi_1}{+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2} = \frac{\log r}{+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2}, \text{ och}$$

$$V = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta = \frac{u \varphi_1 + v \log r_1}{+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2} = \frac{\varphi}{+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2}.$$

Eller, om vi beteckna den constanta storheten $+V(\log r_1)^2 + \varphi_1^2$ med C ,

$$\log r = C \cdot U \text{ och } \varphi = C \cdot V.$$

Hvarje särskildt z -värde motsvaras således af alla de w -värden, hvilkas abscissa i det nya coordinat-systemet är $= \frac{\log r}{C}$ och hvilkas ordinata i samma system är

$$\frac{\varphi}{C}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{C}, \quad \frac{\varphi + 4\pi}{C} \dots\dots\dots \frac{\varphi - 2\pi}{C}, \quad \frac{\varphi - 4\pi}{C} \dots\dots\dots$$

Dessa värden ligga således alla på en rät linie parallel med ordinataxeln och på lika stort atstånd från hvarandra, och om z beskriver en viss curva, så beskrifva de olika w -värdena sinsemellan congruenta och lika belägna curvor, hvilka, om z -curvan omsluter origo, sammanhånga med hvarandra, men annars äro åtskilda. Beskrifver z med constant hastighet en cirkel, hvars medelpunkt är i origo, så kommer hvarje w -värde att beskrifva det stycke af den rätta linien, hvilket ligger emellan detsamma och nästföljande w -värde, äfvenledes med constant hastighet. Beskrifver deremot z en rät linie genom origo, så kommer

¹⁾ För att fixera begreppen förutsätta vi här och framgent $r_1 > 1$, således $\log r_1 > 0$. De små tecken- och rigtnings-förändringar, som i motsatt fall här och der böra göras, inses utan svårighet. Är $\log r_1 = 0$, blir coordinat-transformationen öfverflödig.

hvarje w -värde att beskrifva en med absciss-axeln parallel linie, men om äfven nu z 's hastighet är constant, så är w 's omvänt proportionell mot r .

Dessa båda linier äro de enklaste, vi kunna låta z beskrifva. Innan vi öfvergå till mera invecklade fall, skola vi differentiera eqvationerna

$$\log r = C \cdot U \text{ och } \varphi = C \cdot V.$$

Vi erhålla då

$$\frac{1}{r} dr = C \cdot dU \text{ och } d\varphi = C \cdot dV,$$

hvarur genom division

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dU}{dV}.$$

Således bildar w -curvans tangent samma vinkel med U -axeln, som z -curvans bildar med radius vector. Dessa vinklar kalla vi korteligen A^w och A^z och, om vi liksom i vår ofvannämnda afhandling mäta A^z från radius vector åt venster till den del af z -curvans tangent, som från tangeringspunkten utgår i samma riktning, som z sjelft, så bör A^w från den delen af en med U -axeln genom tangeringspunkten dragen parallel linie, som är rigtad mot de *negativa* abscissornas sida, mätas likaledes åt venster till motsvarande del af w -curvans tangent¹⁾. (Naturligtvis hade man lika gerna kunnat mäta A^z från radii rectoris förlängning och A^w från en åt de positiva abscissornas sida rigtad linie).

Ur de båda differential-*eqvationerna* erhålles vidare

$$\sqrt{\left(\frac{1}{r} dr\right)^2 + (d\varphi)^2} = C \sqrt{(dU)^2 + (dV)^2}; \text{ således}$$

$$(ds)_w = \frac{(ds)_z}{C \cdot r}.$$

Alltså är, icke blott i det ofvan anförda speciella fallet, utan alltid w 's hastighet omvänt proportionell mot r , då z 's hastighet är constant.

Passerar z genom origo, så blir U negativt oändlig, och om icke tilläfväntys z -curvan är en spiral, som genom oändligt många hvarf närmar sig sin i origo belägna pol (såsom t. ex. en logarithmisk eller hyperbolisk spiral), blir vid ankomsten till origo $A^z = 0$, således äfven $A^w = 0$: w -curvan har med U -axeln parallela asymptoter. I det ögonblick z genomgår origo, blir φ discontinuerligt,

¹⁾ Att vinklarna, om de så mätas, verkligen äro lika stora och icke tilläfväntys ligga på afståndet π från hvarandra, inses lätt (jfr. "Om potenser etc." sid. 21), om man blott erinrar sig, att C under vår i föregående not gjorda förutsättning alltid är positivt. Det var fördenskull vi utsatte tecknet $+$ framför rotmärket.

samma förhållande inträffar då med $V:w$ springer öfver mellan sina oändliga branchers yttersta punkter. Omedelbart derefter är $A^z = A^w = \pi : w$ återvänder på de nu beträdda brancherna, hvilka äfven hafva med U -axeln parallela asymptoter. Har z -curvan sjelf oändliga brancher, mellan hvilka z springer öfver, så kommer tydligen den rörelse hos w , som svarar deremot, att bli fullkomligt analog med den nyss beskrifna. Skilnaden blir blott, att de brancher, w i denna händelse beskriver, sträcka sig åt de positiva abscissornas sida.

Tänka vi oss tvenne cirklar med origo till medelpunkt, så visar, såsom vi ofvan sett, eqvationen $\log r = C \cdot U$, att hvardera af dem beskrifven af z motsvarar en rät linie parallel med ordinat-axeln beskrifven af w . Samma eqvation visar tillika, att hvarje z -värde, som ligger emellan tvenne dylika cirklar, motsvaras af w -värden, som ligga emellan de mot samma cirklar svarande räta linier. Om således z beskriver en curva, som helt och hållet är innesluten mellan tvenne cirklar med origo till gemensam medelpunkt, så blifver den deremot svarande w -curvan helt och hållet innesluten mellan tvenne med ordinat-axeln parallela linier.

Beskrifver deremot z en curva, som helt och hållet är innesluten mellan tvenne räta linier genom origo, så visar eqvationen $\varphi = C \cdot V$, att hvarje särskildt w -värde kommer att beskrifva en curva innesluten mellan tvenne med absciss-axeln parallela linier. Om i något af dessa båda fall z -curvan tangeras af de linier, mellan hvilka den är innesluten, så följer af eqvationen $A^w = A^z$, att äfven w -curvan i motsvarande punkter måste tangeras af de linier, som innesluta henne.

Vi vilja nu öfvergå till några speciella exempel och betrakta i första rummet eqvationerna

$r^2 - (a+b)r \cos \varphi + ab = 0$, och $r^2 - (a-b)r \cos \varphi - ab = 0$,¹⁾ hvilka representera tvenne cirklar (Fig. 4), som helt och hållet äro inneslutna mellan de båda ur origo såsom medelpunkt uppritade cirklar, hvilkas radier äro a och b , samt tangera dem begge. Eqvationerna för de motsvarande w -curvorna äro

$$e^{2CU} - (a+b)e^{CU} \cos CV + ab = 0, \text{ och } e^{2CU} - (a-b)e^{CU} \cos CV - ab = 0.$$

¹⁾ a och b äro positiva och $a > b$.

Löses den första af dessa i anseende till e^{CU} , så erhålles

$$e^{CU} = \frac{a+b}{2} \cos CV \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2 \cos^2 CV}{4} - ab}.$$

Häraf ses, att $\cos CV$ måste vara positiv och $>$ eller $= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, samt att det största värde, som kan tillkomma e^{CU} , är a och det minsta b . Curvan är således helt och hållet innesluten mellan linierna

$$U = \frac{\log a}{C} \text{ och } U = \frac{\log b}{C},$$

hvilka just motsvara de båda cirklar, mellan hvilka z -cirkeln är innesluten. Vidare består den af en oändlig serie isolerade delar, hvilka hvar för sig äro inneslutna mellan ett par af linierna

$$V = \frac{1}{C} \cdot \arccos \left(\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \right) \right).$$

Dessa sistnämnda linier motsvara de tangenter, som från origo dragas till z -cirkeln. Genom differentiation erhålles

$$U' = \mp \frac{(a+b) \sin CV}{\sqrt{(a+b)^2 \cos^2 CV - 4ab}};$$

således blir $U' = 0$, om $\sin CV$ är $= 0$, samt $U' = \mp \infty$, om $(a+b)^2 \cos^2 CV$ är $= 4ab$, hvilket bekräftar de ofvan framställda resultaten.

Den andra eqvationen ger

$$e^{CU} = \frac{a-b}{2} \cdot \cos CV + \sqrt{\frac{(a-b)^2 \cos^2 CV}{4} + ab}$$

(Rotmärket måste tagas positivt, emedan annars e^{CU} skulle bli negativt).

Äfven nu är $e^{CU} \leq a$ och $\geq b$, således är äfven denna curva innesluten mellan de räta linierna

$$U = \frac{\log a}{C} \text{ och } U = \frac{\log b}{C}.$$

Men emedan $\cos CV$ kan antaga alla möjliga värden mellan $+1$ och -1 , och således V sjelft kan antaga alla möjliga positiva och negativa värden, finnas inga begränsande linier parallela med absciss-axeln. Också är det omöjligt att draga tangenter till den motsvarande z -cirkeln genom origo, emedan cirkeln sjelf omsluter origo.

Differentiation skulle här gifva

$$U' = - \frac{(a-b) \sin CV}{\sqrt{(a-b)^2 \cos^2 CV + 4ab}},$$

således $U' = 0$, om $\sin CV = 0$. Deremot kan U' ej blifva oändligt, emedan täljaren är finit och nämnaren ej kan bli $= 0$. Genom förnyad differentiation erhålles

$$U'' = - \frac{C(a-b) \cos CV \cdot (a+b)^2}{[(a-b)^2 \cos^2 CV + 4ab]^{3/2}},$$

således $U'' = 0$, om $\cos CV = 0$. Häremot svarar $e^{CV} = \sqrt{ab}$, således är $U = \frac{\log \sqrt{ab}}{C}$ den för alla inflexionspunkterna gemensamma abscissan. Den rätta linie, som drages genom dem ligger således midt emellan de båda w -curvan begränsande linierna ¹⁾.

Låta vi den inre cirkelns radie b indefinit aftaga, så aflägsnar sig den begränsande linien $U = \frac{\log b}{C}$ oändligt åt de negativa abscissornas sida. De båda ofvan betraktade w -curvorna öfvergå vid limes till en gemensam form med oändliga brancher, mellan hvilka w springer öfver, och allteftersom curvan betraktas såsom tillhörande den ena eller andra af de ofvan undersökta formerna, kommer detta språng att ske uppåt eller nedåt.

Ex. 2. Låta vi z beskrifva ellipsen

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

hvilken är innesluten mellan de båda cirklar, som konstrueras på dess axlar såsom diametrar (Fig. 2), så kommer w att beskrifva curvan

$$U = \frac{1}{2C} \cdot \log \left(\frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 CV} \right).$$

Emedan nu $\frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 CV}$ är inneslutet mellan gränserna a^2 och b^2 , blir äfven här U inneslutet mellan gränserna $\frac{\log a}{C}$ och $\frac{\log b}{C}$. Deremot kan V antaga alla möjliga positiva och negativa värden. Det finnes således inga med absciss-axeln parallela begränsande linier.

Genom differentiation erhålles

$$U' = - \frac{e^2 \cos CV \cdot \sin CV}{1 - e^2 \cos^2 CV},$$

således $U' = 0$, om $\sin CV = 0$ eller $\cos CV = 0$. Ordinaterna för de punkter,

¹⁾ Samma rätta linie genomgår alla den ofvan betraktade af ovaler bestående curvans maximi och minimi punkter, hvilken curva tillfölje af en bekant egenskap hos cirkeln är symmetrisk i anseende till samma rätta linie. Congruensen mellan de åt motsatta sidor vända vågorna i den nu sednast betraktade curvan följer äfven af en känd egenskap hos cirkeln.

i hvilka curvan tangerar linien $U = \frac{\log a}{C}$, erhållas genom equationen $\sin CV = 0$, de äro följaktligen

$$V = 0, \pm \frac{\pi}{C}, \pm \frac{2\pi}{C}, \pm \frac{3\pi}{C}, \pm \frac{4\pi}{C}, \dots$$

Deremot tangerar curvan linien $U = \frac{\log b}{C}$ i punkterna

$$V = \pm \frac{\pi}{2C}, \pm \frac{3\pi}{2C}, \pm \frac{5\pi}{2C}, \dots$$

bestämda genom equationen $\cos CV = 0$. — U' kan ej bli oändligt.

Vidare finner man

$$U'' = Ce^2 \cdot \frac{\sin^2 CV - (1 - e^2) \cos^2 CV}{(1 - e^2 \cos^2 CV)^2},$$

således $U'' = 0$, om

$$tg^2 CV = 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

$$V = \pm \frac{1}{C} \arctg \left(\left(\frac{b}{a} \right) \right).$$

Följaktligen äro w -curvans inflexionspunkter de punkter, som motsvara ändpunkterna af de lika stora conjugatdiametrarne i z -ellipsen. Motsvarande abscissa är $= \frac{1}{2C} \log \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)$.

Ex. 3. Beskrifver z hyperbeln

$$r^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \varphi - 1},$$

så blir den motsvarande w -curvans equation

$$U = \frac{1}{2C} \log \left(\frac{b^2}{e^2 \cos^2 CV - 1} \right); \text{ (Fig. 3)}$$

eller, om vinkeln mellan hyperbelns asymptoter är $= 2\alpha$,

$$U = \frac{1}{2C} \log \left(\frac{b^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 CV - \cos^2 \alpha} \right).$$

Här måste således $\cos^2 CV$ vara $\geq \cos^2 \alpha$; curvan består af en oändlig serie isolerade delar inneslutna respective mellan linierna

$$V = + \frac{\alpha}{C} \text{ och } V = - \frac{\alpha}{C}, \quad V = \frac{\pi - \alpha}{C} \text{ och } V = \frac{\pi + \alpha}{C}, \quad V = \frac{2\pi - \alpha}{C} \text{ och } V = \frac{2\pi + \alpha}{C}, \dots$$

$$V = \frac{-\pi - \alpha}{C} \text{ och } V = \frac{-\pi + \alpha}{C}, \quad V = \frac{-2\pi - \alpha}{C} \text{ och } V = \frac{-2\pi + \alpha}{C}, \dots$$

Det minsta möjliga värde, U kan erhålla, är $\frac{1}{2C} \log \left(\frac{b^2}{e^2 - 1} \right) = \frac{\log a}{C}$; då är $\cos^2 CV = 1$, således

$$V = 0, \pm \frac{\pi}{C}, \pm \frac{2\pi}{C}, \pm \frac{3\pi}{C}, \dots$$

Differentiera vi, så blir

$$U' = \frac{\cos CV \cdot \sin CV}{\cos^2 CV - \cos^2 \alpha}.$$

Nu kan $\cos CV$ ej bli $= 0$, det är således blott $\sin CV = 0$, som gör $U' = 0$. U' blir oändlig för $\cos^2 CV = \cos^2 \alpha$. Detta bekräftar ofvan funna resultater. De begränsande linierna äro curvans asymptoter och motsvara hyperbelus.

Ex. 4. Den w -curva, som motsvarar rätta linien

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p, \text{ är}$$

$$e^{CU} \cdot \cos(CV - \alpha) = p,$$

eller, om man tar logarithmerna för begge membra och hänför curvan till punkten $\left(\frac{\log p}{C}, \frac{\alpha}{C}\right)$ såsom origo,

$$U = -\frac{\log \cos CV}{C}.$$

Här måste $\cos CV$ vara positiv, hvadan curvan består af isolerade delar inneslutna respective mellan ett par af linierna

$$V = +\frac{\pi}{2C} \text{ och } V = -\frac{\pi}{2C}, \quad V = \frac{3\pi}{2C} \text{ och } V = \frac{5\pi}{2C}, \quad V = \frac{7\pi}{2C} \text{ och } V = \frac{9\pi}{2C}, \dots$$

$$V = -\frac{3\pi}{2C} \text{ och } V = -\frac{5\pi}{2C} \dots$$

U är inneslutet mellan gränserna 0 och $+\infty$. Differentiation ger $U' = \tan CV$, således $U' = 0$, om

$$V = 0, (\pm \pi), \pm 2\pi, (\pm 3\pi) \dots$$

och således $U = 0$ ¹⁾. $U' = \infty$, om

$$V = \pm \frac{\pi}{2C}, \pm \frac{3\pi}{2C}, \pm \frac{5\pi}{2C} \dots$$

och således $U = +\infty$.

De begränsande linierna parallela med absciss-axeln motsvara båda delarne af den rätta linie, som genom origo drages parallel med z -linien. Den nya ordinat-axeln, som på en sida begränsar w -curvan motsvarar cirkeln $r = p$, hvilken tangeras af z -linien.

Ex. 5. Låt z beskrifva Archimediska Spiralen

$$r = a\varphi!$$

¹⁾ De inom parenteser förekommande värdena måste förkastas, emedan V ej kan antaga dessa värden.

Den motsvarande w -curvan är

$$CU = \log a + \log CV,$$

eller, om punkten $\left(\frac{\log a}{C}, 0\right)$ tages till origo,

$$CU = \log CV:$$

en logaritmisk linie.

Ex. 6. Den w -curva, som motsvarar hyperboliska spiralen

$$r = \frac{a}{q}, \text{ är}$$

$$CU = \log a - \log CV,$$

eller, hänförd till samma origo som den förra,

$$CU = -\log CV:$$

en med den förra symmetrisk logaritmisk linie.

Om i båda dessa fall q ökas med $\pm 2m\pi$, hvilket bör göras, så erhålla vi en oändlig serie af logaritmiska linier belägna öfver hvarandra på constant afstånd. Orsaken, hvarföre icke alla dessa linier representeras genom de funna eqvationerna, är den, att de framställda z -eqvationerna blifva till sin form, ehuru visserligen icke till sin *geometrisk betydelse*, förändrade, om man i stället för q inför $q \pm 2m\pi$.

Det är ett anmärkningsvärdt förhållande, att om z , beskrifvande den Archimediska Spiralen, rör sig utåt, hvarje w -värde kommer att röra sig uppåt (de positiva ordinatornas sida), hvaremot, om z beskrifver den hyperboliska spiralen utåt, hvarje w -värde går nedåt. Skälet är, att i begge fallen w måste förflytta sig åt höger (de positiva abscissornas sida).

Ex. 7. Beskrifver z logaritmiska spiralen

$$r = e^{\frac{q}{m}},$$

så beskrifver ena w -värdet en rät linie genom origo representerad genom eqvationen

$$V = mU,$$

och de öfriga beskrifva rätta linier parallela med denna, hvilka skära axlarna i punkterna

$$U = \pm \frac{2\pi}{mC}, \pm \frac{4\pi}{mC}, \dots \text{ och } V = \pm \frac{2\pi}{C}, \pm \frac{4\pi}{C}, \dots$$

Af eqvationerna

$$\log r = CU \text{ och } q = CV$$

framgår, att om z -curvan, utan att förändra sitt utseende, roterar omkring origo,

hvarigenom alla dess punkters anomalier blifva ökade med en och samma storhet, och deras radii vectores deremot blifva oförändrade, så kommer w -curvan likaledes att bibehålla sitt utseende oförändradt, under det den förflyttar sig parallelt med V -axeln; ty alla dess punkters ordinator blifva lika mycket förökade, och deras abscissor blifva oförändrade.

Samma resultat framgår äfven ur equationen

$$(ds)_w = \frac{(ds)_z}{C.r}.$$

Om nemligen z -curvan roterar omkring origo, så beskrifva alla dess punkter med samma angulära hastighet cirklar omkring origo, hvadan $\frac{(ds)_z}{r}$ är för dem alla lika stor, således blir äfven alla de särskildta punkternas af w -curvan lineära hastighet $(ds)_w$ densamma. Då nu tillika alla dessa punkter beskrifva sinsemellan parallela räta linier, är det klart, att deras inbördes läge, således äfven w -curvans utseende, blir oförändradt.

Om deremot z -curvan, utan att förändra sitt utseende, förflyttar sig på något annat sätt, så blir w -curvans utseende förändradt. Vi hafva ofvan sett hvilka olika former den antager, då z beskriver en cirkel, allteftersom denna cirkel omsluter origo eller icke, och vilja nu undersöka, huru dessa öfvergå i hvarandra, om z -cirkelns medelpunkt beskriver hela den reella storhetslinien från $+\infty$ till $-\infty$, och derunder dess radie förblir constant $= R$. Radierna till de ur origo såsom medelpunkt uppritade cirklar, hvilka innesluta och tangera z -cirkeln, förminskas, alltjemt bibehållande samma inbördes skilnad, ända tills den ena af dem blir $= 0$, i det ögonblick z -cirkelns medelpunkt kommer på afståndet R från origo. Derefter framträder denna cirkel såsom tangerande innifrån, och dess radie växer, på samma gång som den andre cirkelns radie aftar, tills begge bli $= R$, i det ögonblick z -cirkelns medelpunkt passerar genom origo, då således alla tre cirklarne sammanfalla. De skilja sig derefter åter, den enas radie aftar till 0 , under det den andras växer till $2R$; derefter växa begge in infinitum, bibehållande samma constanta skilnad. Betrakta vi åter de räta linier genom origo, som tangera z -cirkeln, så finna vi, att vinkeln mellan dem, som i början är $= 0$, continuerligt växer, tills den, i det ögonblick z -cirkeln kommer att passera genom origo, blir $= \pi$. Derefter äro de båda linierna imaginära, tills origo

åter utträder ur cirkeln. Nu bilda de åter vinkeln π med hvarandra, och denna vinkel aftager derefter continuerligt till 0.

Häraf sluta vi följande beträffande de rätta linier, som innesluta och tangera w -curvan, samt denna sjelf. De båda med ordinat-axeln parallela gränslinierna ligga i början begge på oändligt afstånd från origo, men oändligt nära intill hvarandra, emedan deras iuhördes afstånd är

$$\frac{\log(\infty + 2R) - \log \infty}{C} = \frac{\log \frac{(\infty + 2R)}{\infty}}{C} = 0.$$

Likaledes ligga de med absciss-axeln parallela linier, som innesluta den af ett särskildt w -värde beskrifna curvan, oändligt nära intill hvarandra, emedan afståndet mellan dem är $= \frac{\delta}{C}$, om δ betyder den oändligt lilla vinkeln mellan z -cirkelns tangenter genom origo. Således utgöres w -curvan nu af en oändlig serie isolerade punkter belägna på en oändligt aflägsen med ordinataxeln parallel linie och på afståndet $\frac{2\pi}{C}$ från hvarandra. En af dessa punkter ligger på absciss-axeln, således äro ordinaterna för de öfriga $\pm \frac{2m\pi}{C}$. Under det z -cirkeln rycker närmare origo, öfvergå dessa punkter till congruenta slutna curvor, hvilka alltjemt växa, tills, i det ögonblick z -cirkeln passerar genom origo, den ena af deras med ordinat-axeln parallela gränslinier aflägsnar sig oändligt, hvarigenom de blifva oändligt utdragna på längden. Deremot har deras bredd eller höjd ej hunnit längre än till $\frac{\pi}{C}$. Curvans brancher hafva ända tills de blefvo oändliga varit förenade två och två. Nu upplösas dessa föreningar och hvarje branch samman-smälter i stället med sin granne på andra sidan, från hvilken han dittills varit skild. Härigenom öfvergår curvan till ett sammanhängande helt. Under det nu z -cirkelns medelpunkt går till origo, återvänder den oändligt aflägsnade gränslinien, den nu vågformiga w -curvan blir derigenom allt mer hoppressad, och dess vågor således allt mer utjennade, tills, i det ögonblick båda gränslinierna möta hvarandra, w -curvan sjelf öfvergår till en rät linie sammanfallande med dem. Då gränslinierna åter aflägsna sig från hvarandra, blir w -curvan åter vågformig, men erhåller nu upphöjningar, der den förut hade insänkningar och tvärtom, eller abscissornas maxima och minima äro ombytta. Alldeles samma förändringar genomgås nu i motsatt ordning, så att, då slutligen z -cirkelns medelpunkt hin-

ner oändligt långt åt negativa sidan, består w -curvan åter af en serie isolerade punkter belägna på en med ordinat-axeln parallel linie på oändligt afstånd; men nu äro deras ordinator $\pm \frac{(2m+1)\pi}{C}$.

Vi hafva alltjemt antagit, att z -cirkeln haft sin medelpunkt belägen på den reella storhetslinien. Den w -curva, som motsvarar en cirkel belägen hvarsomhelst i planet, är, enligt hvad ofvan är visadt, i intet annat alseende olik den nu betraktade, än att den blifvit förflyttad i en med ordinat-axeln parallel rigtuing ett stycke $= \frac{\alpha}{C}$, om α är anomalien för z -cirkelns medelpunkt.

Läsaren må sjelf undersöka curvorna

$$e^{CU} = \operatorname{tg} CV, e^{2CU} = a^2 \cos 2CV, e^{CU} = 2a(1 + \cos CV) \text{ och } e^{2CU} = a^2 CV,$$

hvilka motsvara *tangentcurvan*, *lemniscatan*, *cardioïden* och *paraboliska spiralen*.

Den tredje af dessa eqvationer kan äfven skrivas under formen $e^{1/2CU} = 2\sqrt{a} \cos \frac{CV}{2}$, hvarigenom den erhåller en påfallande likhet med den andra af dem samt med eqvationen för den w -curva, som motsvarar en genom origo gående cirkel:

$e^{CU} = a \cos CV$. Ja alla tre dessa curvor äro likformiga, hvilket tydligast synes, om man hänför hvar och en af dem till sin spets såsom origo, hvarigenom deras eqvationer blifva:

$$e^{1/2CU} = \cos 1/2 CV, e^{CU} = \cos CV \text{ och } e^{2CU} = \cos 2CV.$$

Detta har sin grund deri, att om z beskriver en lemniscata, så kommer (jfr. "Om potenser etc.") z^2 att beskriva en cirkel genom origo och z^4 en cardioïd. Är nu $z = \alpha^w$, så blir

$$z^2 = \alpha^{2w}, \text{ och } z^4 = \alpha^{4w}; \text{ eller}$$

$$2w = \log_{(\alpha)} (z^2); 4w = \log_{(\alpha)} (z^4).$$

Det är tydligt, att de curvor, som beskrivas af w , $2w$ och $4w$, måste vara likformiga.

Genom en enkel integration finner man, att den yta, som begränsas af curvan $e^{CU} = \cos CV$, dess ena asymptot och dess genom spetsen dragna tangent, är lika med

$$\frac{1}{C^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log 2.$$

Motsvarande ytor vid de andra curvorna äro tydligen

$$\frac{1}{C^2} \cdot 2\pi \cdot \log 2 \text{ och } \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \log 2.$$

Vi återgå till våra fundamental-*eqvationer*

$$\log r = CU \text{ och } \varphi = CV$$

och antaga nu, att hvarje r blir multiplicerad med samma qvantitet, d. v. s. att z -curvan, förblifvande likformig med sig sjelf, förändrar läge och dimensioner så, att origo är gemensamt likhets-centrum för alla de gestalter den antager. Då blir hvarje U ökad med en och samma storhet, eller alla de motsvarande w -curvorna blifva äfven nu congruenta. Combineras detta med det resultat, som vi funno, då vi antogo, att z -curvan roterade omkring origo, så kunna derur märkeliga slutsatser dragas. Sålunda motsvaras t. ex. alla de cirklar, som passera genom origo, deras storlek och deras medelpunkters läge i planet må *förförigt* vara hvilka som helst, af sinsemellan congruenta w -curvor. Likaledes alla andragradscurvor med samma excentricitet och origo till gemensam medelpunkt eller brännpunkt o. s. v.

Vi tillägga slutligen några ord om de olika w -curvor, hvilka i olika logaritmiska systemer motsvara en och samma z -curva:

1) Alla sådana curvor äro likformiga, logaritmssystemets bas må vara hvilken som helst.

Satsen följer omedelbart ur *eqvationerna*

$$\log r = CU, \varphi = CV.$$

2) I alla de logaritmssystemer, hvilkas bas ligger på en logaritmisk spiral representerad genom *eqvationen*

$$\frac{\varphi}{\log r} = \vartheta, \quad (\vartheta \text{ constant})$$

äro dylika curvor lika belägna eller ock alldeles motsatta, hvilket beror af tecknet för C ; emedan i alla dessa systemer vridningen af axlarna vid coordinat-transformationen är densamma.

3) Samma curvor äro congruenta i de systemer, hvilkas bas ligger på en curva representerad genom *eqvationen*

$$(\log r)^2 + \varphi^2 = C^2, \quad (C \text{ constant}).$$

4) Atertaga vi de ursprungliga eqvationerna

$$\log r = u \log r_1 - v \varphi_1, \text{ och } \varphi = u \varphi_1 + v \log r_1;$$

så visa dessa, att hvar och en af de räta linier, hvilka motsvara en rät linie genom origo och en cirkel med origo till medelpunkt beskrifna af z , måste, under det logarithmiska basen beskriver någon af dessa sistnämnda figurer, rotera kring en fast punkt i en af coordinataxlarne.

5) Härigenom ledes uppmärksamheten på ett förhållande, som vi hittills med flit lemnat ur sigte, emedan det blott skulle förvirrat våra undersökningar. Det nemligen, att om logarithmiska basen icke, såsom vi alltjemt förutsatt, vore gifven i polar-coordinater (r_1 och φ_1), utan man blott kände dess läge i planet, så att man till dess anomali (φ_1) kunde tillägga $\pm 2m\pi$; så skulle ett nytt slags mångtydighet inträda, hvarigenom de olika w -värden, som motsvara samma z -värde, och således äfven de w -curvor, som motsvara samma z -curva, skulle komma att bilda en oändlig *dubbelserie*.

Trigonometriska Funktioner.

Är $w = \sin z$, så blir

$$u + vi = \sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \sin yi \cos x = \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

således

$$u = \sin x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \text{ och } v = \cos x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Eliminera vi x ur dessa båda eqvationer, så erhålles

$$\frac{4u^2}{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{4v^2}{(e^y - e^{-y})^2} = 1.$$

Härur följer, att om y är constant, d. v. s. om z beskriver en rät linie parallel med x -axeln, så måste w beskrifva en ellips, hvars centrum sammanfaller med origo, och hvars halfaxlar äro $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$ och $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Alla dylika ellipser hafva

tydiligen punkterna ± 1 till brännpunkter och äro således confocala. Är y positivt, och z tänkes utgå från den punkt, der den räta linien skär y -axeln och röra sig åt de positiva abscissornas sida, så utgår w från den positiva ändpunkt-

ten af ellipsens mindre axel och förflyttar sig till positiva ändpunkten af ellipsens större axel, under det z 's abscissa (x) växer till $\frac{\pi}{2}$. Derifrån går w till mindre axelns negativa ändpunkt, under det x växer till π o. s. v., så att, under det z beskriver hela den rätta linien, beskriver w samma ellips oändligt många gånger, alltjemt beskrifvande ett fjerdedels hvarf, under det z 's abscissa växer från π till $\frac{3\pi}{2}$, från $\frac{3\pi}{2}$ till 2π , från 2π till $\frac{5\pi}{2}$ o. s. v. Förflyttar sig deremot z åt de negativa abscissornas sida, så måste w beskrifva sin ellips i motsatt rigtning, men äfven nu beskriver den fjerdedelen af ellipsen, under det numeriska valören af z 's abscissa växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$, från $\frac{\pi}{2}$ till π , från π till $\frac{3\pi}{2}$ o. s. v.

Är deremot y negativt, och z går åt de positiva abscissornas sida, så går w från den mindre axelns negativa till den större axelns positiva ändpunkt o. s. v., samt i motsatt rigtning, om y går åt de negativa abscissornas sida.

Detta kan så sammanfattas, att z och w sedda från origo antingen röra sig begge åt höger eller begge åt venster.

Ellipsens eqvation blir oförändrad, om y , bibehållande sin numeriska valör, byter om tecken. Således motsvaras tvenne rätta linier parallela med x -axeln, och på samma afstånd derifrån, belägna en åt hvardera sidan, af en och samma ellips. Det finnes oändligt många z -värden, som motsvaras af ett och samma w -värde, och om ett af dessa är $a + bi$, så äro de öfriga $a \pm 2m\pi + bi$ och $-a \pm (2m + 1)\pi - bi$, hvarest m är ett helt tal. Att ett z , som ej ligger på någon af dessa båda rätta linier, omöjligen kan motsvaras af samma w , följer deraf, att confocala ellipser ej kunna skära hvarandra utan att sammanfalla.

Låta vi z -linien förflytta sig parallelt med sig sjelf, i det y genomgår alla reella storhetsgrader från $+\infty$ till $-\infty$, så kommer w -ellipsen, som i början är en cirkel med oändlig radie, att småningom hoppressas, tills den, i det ögonblick z -linien sammanfaller med den reella storhetslinien, öfvergår till det stycke af samma rätta linie, som ligger emellan punkterna $+4$ och -4 , hvilka punkter, såsom vi ofvan sett, alltjemt varit ellipsens brännpunkter. Den utvidgar sig derefter åter, tills den blir en cirkel med oändlig radie, då y är $= -\infty$.

I den händelse att y blir $= 0$, komma de båda z -linier, som motsvara samma ellips, att sammanfalla med den reella storhetslinien och således äfven

med hvarandra. På denna linie komma således de z -värden, som motsvara ett och samma w -värde (reellt och numeriskt mindre än 1), att ligga tätare, än annars, så att, om ett sådant är a , de öfriga äro $a \pm 2m\pi$ och $-a \pm (2m+1)\pi$.

Om ur de båda ofvan framställda eqvationerna

$$u = \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \text{ och } v = \cos x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

y elimineras, så erhåller man

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1.$$

Denna eqvation representerar en med de förut betraktade ellipserna confocal hyperbel, hvilken tydligen w beskriver, om z beskriver en rät linie parallel med y -axeln. Det är emellertid blott ena branchen af denna hyperbel, w beskriver; hvilkendera det är beror på, om afståndet mellan y -axeln och z -linien ligger mellan 0 och π , eller mellan π och 2π o. s. v., i det nemligen enligt eqvationen

$$u = \sin x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

u alltid måste hafva samma tecken som $\sin x$. Låta vi således z -linien från att vara sammanfallande med y -axeln förflytta sig parallelt med sig sjelf åt de positiva abscissornas sida, så kommer den af w beskrifna hyperbelbranchen, som svarar deremot, att i början sjelf sammanfalla med y -axeln, men derefter hopböjes den så, att den, redan då abscissan för z blifvit $\frac{\pi}{2}$, öfvergår till den del af den reella storhetslinien, som ligger emellan $+1$ och $+\infty$. Derefter utvidgar den sig åter, så att, då z 's abscissa blir π , öfvergår den åter till rät linien $u=0$. Nu hopböjes den åt andra sidan, tills den öfvergår till den del af reella storhetslinien, som ligger emellan -1 och $-\infty$, i det ögonblick z 's abscissa blifvit $\frac{3\pi}{2}$. Den utvidgar sig nu åter o. s. v. in infinitum. Förflyttar sig deremot z -linien åt de negativa abscissornas sida, så börjar hyperbeln med att böja sig åt motsatta sidan o. s. v.

En fråga, som härvid ligger lika nära tillhands, som den är lätt att hesvara, är den om läget för de z , som motsvaras af reella w -värden, som äro numeriskt större än 1. De ligga på rät linier $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{9\pi}{2}$
 $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{7\pi}{2}$, $x = -\frac{11\pi}{2}$, om w är positivt, och på linierna

$x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}, x = \frac{11\pi}{2} \dots \dots x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{9\pi}{2} \dots \dots$,
om w är negativt.

Under det z beskriver hela sin rätta linie, beskriver w sin hyperbelbranch endast en gång. Vidare visar eqvationen

$$v = \cos x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

att om x ligger emellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ och 2π , 2π och $\frac{5\pi}{2}$ eller $\frac{7\pi}{2}$ och 4π o. s. v., måste y och v halva samma, annars motsatta tecken, så att i förra händelsen öfre delen af rätta linien motsvaras af öfre delen af hyperbeln, i sednare händelsen af den nedre.

Har man $w = \cos z$, så erhålles

$$u + vi = \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

således

$$u = \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \text{ och } v = -\sin x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Elimineras x , så erhålles eqvationen

$$\frac{4u^2}{(e^y + e^{-y})^2} + \frac{4v^2}{(e^y - e^{-y})^2} = 1.$$

Om således z beskriver en rät linie parallel med x -axeln, så komma $\sin z$ och $\cos z$ att beskriva en och samma ellips. Men de befinna sig på olika ställen på denna ellips. Antag äfven nu till en början, att y är positivt, och att z , utgående från liniens skärningspunkt med y -axeln, rör sig åt de positiva abscissornas sida. Då utgår w från större axelns positiva ändpunkt, förflyttar sig derifrån till mindre axelns negativa ändpunkt o. s. v. Går z i motsatt rigtning, inträffar detsamma med w .

Är deremot y negativt, och z äfven nu utgår från sin linies skärningspunkt med y -axeln åt de positiva abscissornas sida, så utgår äfven nu w från större axelns positiva ändpunkt, men förflyttar sig derifrån till mindre axelns positiva ändpunkt o. s. v., samt i motsatt rigtning, om z går åt de negativa abscissornas sida. Således förflytta sig z , $\sin z$ och $\cos z$ sedda från origo antingen alla tre åt höger eller alla tre åt venster. Men om y är positivt, befinner sig $\cos z$ till höger om $\sin z$ och går således före, om rörelsen sker i denna rigtning, men

efter, om rörelsen sker åt venster. Är deremot y negativt, så ligger $\cos z$ till venster om $\sin z$.

Ett och samma w -värde motsvarar äfven nu oändligt många z -värden belägna på tvenne räta linier parallela med x -axeln. Men nu är deras läge sådant, att om ett af dem är $= a + bi$, så äro de öfriga $a \pm 2m\pi + bi$ och $-a \pm 2m\pi - bi$.

I den speciella händelsen $y = 0$ komma liksom förut de båda räta linierna att sammanfalla, så att de reella z -värden, som motsvaras af samma w -värde, äro $\pm a \pm 2m\pi$.

En annan egendomlig händelse, som härvid inträffar, är, att, emedan w -ellipsen blifvit hoppressad till en rät linie, det finnes vissa reella, men också endast reella, z -värden, för hvilka $\sin z$ och $\cos z$ blifva lika.

Betrakta vi ett speciellt z -värde och beteckna med u_1 och v_1 coordinaterna för $\sin z$ och med u_2 och v_2 coordinaterna för $\cos z$, samt ellipsens axlar med a och b , så är

$$u_1 = \sin x \cdot a, \quad v_1 = \cos x \cdot b, \quad u_2 = \cos x \cdot a \quad \text{och} \quad v_2 = -\sin x \cdot b.$$

Således $\frac{u_1}{a} = -\frac{v_2}{b}$ och $\frac{u_2}{a} = \frac{v_1}{b}$. Följaktligen befinna sig $\sin z$ och $\cos z$ i ändpunkterna af conjugerade diametrar i ellipsen ¹⁾.

Eliminera vi y ur equationerna

$$u = \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{och} \quad v = -\sin x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

så erhålla vi

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 4.$$

Således motsvaras äfven nu en rät linie parallel med y -axeln af en hyperbel med punkterna $+4$ och -4 till brännpunkter. Denna hyperbel är emellertid i allmänhet icke densamme, som $\sin z$ beskriver, utan de vinklar, som deras asymptoter bilda med reella axeln, äro hvarandras complementsvinklar. Blott ena hyperbelbranchen beskrifves och blott en gång, under det z beskriver hela sin räta linie. Hvilkendera det är beror på tecknet för $\cos x$, och om z , utgående från sin linies skärningspunkt med reella storhetslinien, rör sig uppåt, så beskriver w den ötre delen af hyperbelbranchen, om $\sin x$ är negativ, annars den nedre. Tvärtom, ifall z beskriver nedre delen af sin räta linie.

¹⁾ Jfr. Crelles Journal Bd. 55 sid. 246 och följ.

Tänka vi oss z -linien, utgående från att vara sammanfallande med y -axeln, förflytta sig parallelt med sig själf åt ena eller andra sidan, så är w -hyperbeln i början sammanfallande med den del af reella storhetslinien, som ligger emellan $+1$ och $+\infty$, derefter öppnar den sig alltmer och mer, tills den sammanfaller med y -axeln, då z 's abscissa blifvit $\pm \frac{\pi}{2}$. Nu böjer den sig åt andra sidan, hoppressas alltmer och mer, tills den, då z 's abscissa är $\pm \pi$, sammanfaller med den del af reella storhetslinien, som ligger emellan -1 och $-\infty$ o. s. v. Följaktligen ligga de z -värden, för hvilka w blir reellt och numeriskt större än 1 , på linierna $x=0$, $x=\pm 2\pi$, $x=\pm 4\pi$ o. s. v., om w är positivt, och på linierna $x=\pm \pi$, $x=\pm 3\pi$, $x=\pm 5\pi$ o. s. v., om w är negativt.

Är $w = \operatorname{tg} z$, $u + vi = \operatorname{tg}(x + yi)$, så erhålla vi

$$u + vi = \frac{\sin x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}}{\cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}} = \frac{2 \sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + 2 \cos 2x + e^{-2y}}, \text{ således}$$

$$u = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + 2 \cos 2x + e^{-2y}}, \text{ och } v = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + 2 \cos 2x + e^{-2y}}.$$

Elimineras x , så erhålles

$$u^2 + v^2 - 2v \cdot \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}} + 4 = 0.$$

Således motsvaras systemet af alla med x -axeln parallela linier af ett system af cirklar med x -axeln till radicalaxel. De skära den icke, emedan $v=0$ ger $u^2 + 4 = 0$. Deras medelpunkter ligga på y -axeln. Den constanta längden af de tangenter, som från origo dragas till en cirkel i systemet, är $= 1$. Systemets gränspunkter äro punkterna $\pm i$. Ett negativt y motsvaras af ett negativt v , och ett positivt y af ett positivt v , eller den rätta linie, som z beskriver, och cirkeln, som w beskriver, ligga båda på samma sida om den reella storhetslinien. Låta vi z -linien från $y = +\infty$ continuerligt förflytta sig parallelt med sig själf till $y = -\infty$, så är w -cirkeln i början oändligt liten och sammanfaller med gränspunkten $+i$, derefter utvidgar den sig, tills, i det ögonblick y blir 0 , både dess radie och dess medelpunkts ordinata äro oändliga och vid limes sinsemellan lika, hvadan cirkeln nu sammanfaller med den reella storhetslinien. Den böjer sig nu åt andra sidan och hopsmälter mer och mer, tills den slutligen blir oändligt liten och sammanfaller med systemets gränspunkt $-i$.

Utgår z från den punkt, der dess rätta linie skär y -axeln, så utgår w från den af y -axelns skärningspunkter med w -cirkeln, som ligger närmast origo, och rör sig i början i samma riktning som z . Då z 's abscissa blifvit $\pm \frac{\pi}{4}$, befinner sig w i ena tangeringspunkten för de tangenter till w -cirkeln, som gå genom origo. Derifrån går w till cirkelns andra skärningspunkt med y -axeln, under det numeriska värdet för z 's abscissa växer till $\frac{\pi}{2}$ o. s. v., så att, då denna värde blifvit π , har w beskrifvit cirkeln en gång. Det beskriver den derefter hvarf efter hvarf i oändlighet. De olika z -värden, som motsvaras af samma w -värde, innefattas således i formeln $a \pm m\pi + bi$. De ligga alla på en rät linie parallel med den reella storhetslinien. Att ett z , som ej ligger på denna rätta linie, icke kan motsvaras af samma w , följer deraf, att cirklar med gemensam radical-axel, hvilken de icke skära, ej kunna skära hvarandra utan att sammanfalla.

Emedan punkterna $\pm i$ äro systemets gränspunkter, inses, att w blir $= \pm i$, så snart z 's ordinata är oändlig, dess abscissa må vara hvilken som helst. Härigenom förklaras det egendomliga förhållandet, att den imaginära rätta linien $y = xi$ med hvarje reell linie bildar en vinkel, hvars trigonometriska tangent är $= i$.

Eliminera vi y ur våra båda ofvan framställda eqvationer, så erhålla vi

$$u^2 + v^2 + 2u \cotg 2x = 1.$$

Denna eqvation representerar en cirkel, som skär ordinat-axeln i punkterna $v = \pm 1$. Således motsvaras äfven systemet af de rätta linier, som äro parallela med y -axeln af ett system af cirklar med gemensam radicalaxel, men denna är nu ordinataxeln, och cirklarne skära den i reella punkter, nemligen just i det förre systemets gränspunkter.

Är $y = 0$, så blir enligt de båda först framställda eqvationerna $v = 0$ och $u = \tg x$. Cirkelns eqvation ger emellertid för $v = 0$ åt u tvenne värden, nemligen $u = \tg x$ och $u = -\cotg x$, eller cirkeln skär u -axeln i tvenne punkter, men det är blott den ena af dessa, som motsvarar z -liniens skärningspunkt med samma axel. Är vidare $\sin 2x$ positiv, så blir äfven u positivt, det är således blott den del af w -cirkeln, hvilken ligger på ena sidan om ordinataxeln, som w beskriver, under det z beskriver hela sin rätta linie. Är y negativt, så blir äfven v negativt, men negativt, om y är negativt. Utgår således z från den punkt, der dess linie skär abscissaxeln, så utgår w från den ena af sin cirkels

skärningspunkter med samma axel, och om z rör sig uppåt, så rör sig äfven w uppåt, tvärtom, om z rör sig nedåt. Först då z hunnit oändligt långt bort, hin-
ner w till en af sin cirkels skärningspunkter med ordinataxeln, $\pm i$.

Tänkes z -linien från att sammanfalla med ordinataxeln förflytta sig parallelt med sig sjelf åt de positiva abscissornas sida, så är w -curvan i början den del af y -axeln, som ligger emellan $+i$ och $-i$, hvilken härvid är att betrakta såsom ett stycke af en cirkel med oändlig radie och oändligt aflägsen medelpunkt. I det medelpunkten rycker närmare, blir krökningen märkbar. Då slutligen z -liniens afstånd från ordinataxeln blifvit $\frac{\pi}{4}$, sammanfaller w -cirkelns medelpunkt med origo, dess radie är $= 1$, och den del deraf, som w beskriver, är en halfcirkel. Derefter går medelpunkten öfver till de positiva abscissornas sida, och cirkeln växer allt mer och mer, tills, då z 's abscissa blir $= \frac{\pi}{2}$, den åter är oändlig, och dess medelpunkt oändligt aflägsen, men nu åt positiva sidan. Nu beskriver w hela denna cirkel, med undantag af det lilla stycke, som sammanfallande med ordinataxeln ligger emellan punkterna $+i$ och $-i$. Då z -linien ytterligare aflägsnar sig, springer w -cirkelns medelpunkt öfver från $+\infty$ till $-\infty$, hvarefter cirkeln åter hoptränges och dess medelpunkt närmar sig origo. Liksom förut är det ännu den *större* delen af cirkeln, som w beskriver, men denna del ligger nu åt de negativa abscissornas sida. I det ögonblick z -liniens afstånd är $\frac{3\pi}{4}$, sammanfaller cirkelns medelpunkt åter med origo, och den del af cirkeln, som w beskriver, är åter en halfcirkel. Samma förändringar upprepas nu in infinitum. Flyttar sig z -linien åt andra sidan, försiggå tydligen samma förändringar i motsatt ordning.

Den vinkel, hvarunder afståndet mellan punkterna $+i$ och $-i$ ses från w , är, då z -linien sammanfaller med ordinataxeln, $= \pi$. Då z -linien flyttas parallelt med sig sjelf, förändras denna vinkel med dubbelt så stor hastighet som z 's abscissa, men oscillerar alltjemnt fram och tillbaka mellan π och 0 .

Ur eqvationen $w = \cotg z$, eller $u + vi = \cotg (x + yi)$ erhålla vi

$$u = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} - 2 \cos 2x + e^{-2y}}, \text{ och } v = - \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} - 2 \cos 2x + e^{-2y}}.$$

Successiva eliminationer af x och y gifva här

$$u^2 + v^2 + 2v \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}} + 1 = 0, \text{ och } u^2 + v^2 - 2u \cotg 2x = 1.$$

Således motsvaras i denna händelse räta linier parallela med coordinataxlarne af samma båda cirkelsystemer, som då vi hade $w = \operatorname{tg} z$. Vi öfverlemna åt läsaren att genom analog diskussion undersöka, hvilken cirkel som i närvarande fall motsvarar hvarje särskild af de räta linierna, huru w beskriver sin cirkel, under det z beskriver sin räta linie, samt huru w -cirkeln förändras, under det z -linien flyttas parallelt med sig sjelf¹⁾.

Anmärkningsvärd är den bekräftelse, de nu behandlade funktionerna gifvit oss på satsen om "*isogonala förvandtskapen*":²⁾ de båda systemer af räta linier, vi låtit z beskrifva, skära hvarandra under räta vinklar, samma förhållande eger rum med de motsvarande systemerna af w -curvor.

Vid undersökningen af sambandet mellan z - och w -curvorna hänförde vi, då w var en potens af z , i allmänhet (med undantag af de aldra enklaste fall) båda curvorna till polar-coordinater. Då w var en logarithm af z , hänförde vi deremot w -curvan till rätliniga, rätvinkliga coordinater, men z -curvan till polar-coordinater. Detta förfaringssätt var ingalunda godtyckligt, utan hade sin naturliga grund i beskaffenheten af de funktioner, vi behandlade. Grunden är ej heller svår att finna: att hänföra en curva till ett visst coordinatsystem betyder i allmänhet (se t. ex. Briot och Bouquets *Géométrie Analytique* pag. 4, § 5) det samma, som att betrakta dess punkter såsom intersektionspunkter för tvenne systemer af curvor, hvarvid de curvor, som tillhöra samma system, endast skilja sig åt genom de olika valörer, som tillkomma en viss för hvarje särskild curva constant och curvan således bestämmande parameter. Med en punkts coordinater förstås då valörerna på dessa båda parametrar för de båda curvor (en tillhörande hvardera systemet), hvilka skära hvarandra i punkten. Betecknas den föränderliga parametern i det ena systemet af curvor med x , i det andra med y , så representerar eqvationen $f(x, y) = 0$ en curva. De enklaste möjliga eqvationer äro naturligtvis $x = C$ och $y = C$, hvilka, såsom nyss nämndes, representera curvor tillhöriga sjelfva coordinatsystemet. De enklaste möjliga coordinatsystemer äro rätliniga och polar-coordinater, de förra utgöras af tvenne systemer

¹⁾ Undersökningen häraf kan äfven ske på det sätt, att man från det nu kända läget för $\operatorname{tg} z$ sluter sig till läget för $\operatorname{cotg} z$ genom eqvationen $\operatorname{cotg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$, enligt hvilken (se "Om potenser etc." sid 14) deras anomalier äro numeriskt lika men med motsatta tecken, och deras radii vectores äro hvarandras reciproka värden.

²⁾ Se Crelles Journal Bd. 55 sid. 228.

af sinsemellan parallela räta linier, de sednare af ett system af concentriskä cirklar och ett system af räta linier gående genom cirkelnes gemensamma medelpunkt ¹⁾).

Är nu z en complex variabel, och $w = F(z)$, så motsvaras uppenbarligen ett system af z -curvor af ett system af w -curvor, emedan den föränderlige parameter, som förekommer i z -curvornas eqvationer (dessa må nu vara hänförda till hvilket coordinatsystem som helst), och hvars olika valörer utgör den enda skilnaden dem emellan, äfven måste förekomma i de ur de föregående härledda eqvationerna för motsvarande w -curvor och vara det enda, som är i dem olika. Hänföres nu z -curvan till tvenne systemer af curvor såsom coordinater (låt deras parametrar betecknas med x och y !), så är för bildandet af w -curvans eqvation särdeles fördelaktigt att såsom dess coordinater betrakta just de båda motsvarande systemerna, ty (beteckna dessas parametrar med u och v !) vi ha' då u ensamt beroende af x och v ensamt beroende af y , hvilket naturligtvis i allmänhet både underlättar elimineringen af x och y och förenklar dess resultat, eqvationen för w -curvan. Kan man härvid tillika använda vare sig rätliniga eller polar-coordinater, har detta sina stora fördelar, i synnerhet då frågan blir att bestämma curvans utseende och anmärkningsvärda egenskaper, sedan dess eqvation är känd.

Då w är en potens af z med reell exponent, motsvaras systemet af concentriskä z -cirklar med origo till medelpunkt af ett system concentriskä w -cirklar, för hvilka likaledes origo är medelpunkt, samt systemet af räta linier genom origo beskrifna af z af samma system af räta linier beskrifna af w . Är deremot w en logarithm af z , så motsvaras samma båda systemer af z -curvor af tvenne systemer af parallela räta linier beskrifna af w . Härei ligger grunden till vårt val af coordinater.

Då w är $= \sin z$, motsvaras, såsom vi ofvan sett, de båda systemer af parallela räta linier, hvilka utgöra det vanliga rätliniga, rätvinkliga coordinatsystemet, beskrifna af z af tvenne systemer confocala coniska sektioner beskrifna af w . Vilja vi betrakta dessa såsom coordinatsystem för w -curvan, så finnes det flera olika, ehuru naturligtvis af hvarandra fullkomligt beroende storheter, genom

¹⁾ Ofvanstående, som i sig sjelft innehåller endast allbekanta saker, ha' vi anført, blott emedan det är nödvändigt för det följande resonnementet att hafva *fästet uppmärksamheten* derpå.

hvilka hvarje särskild ellips skiljes från de öfriga t. ex. större axeln, mindre axeln, excentriciteten o. s. v., hvilka vi kunna betrakta såsom coordinater för w . Samma förhållande eger rum med hyperblarne. Anmärkningsvärdt är, att om ellipsens ena halfaxel och lutningsvinkeln mellan hyperbelns asymptot och reella axel tagas till coordinater, man i det speciella fall, då båda brännpunkterna sammanfalla, återkommer till polar-coordinater; samt att om ellipsens mindre och hyperbelns reella halfaxel tagas till coordinater, likaledes rätliniga coordinater äro ett speciellt fall, nemligen det, då brännpunkterna äro oändligt aflägsnade.

Vi välja i närvarande fall till coordinater för w ellipsens mindre halfaxel, $B = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, och lutningsvinkeln mellan hyperbelns asymptot och imaginära axel, $\Omega = x$. Nu skära ellipsen och hyperbeln hvarandra i fyra punkter, men blott en af dessa intages af vårt w , hvilkendera detta i hvarje särskildt fall är, hafva vi ofvan utförligt visat. Med uttrycket "hyperbelns asymptot" mena vi den, som på oändligt afstånd tangerar just den fjerdedel af hyperbeln, på hvilken w befinner sig. Vidare måste, för att Ω skall vara $= x$, denna vinkel mätas från positiva eller negativa delen af imaginära axeln, allteftersom y är positivt eller negativt, samt åt höger (venster) eller venster (höger), allteftersom x är positivt eller negativt.

Den fråga, som nu i första hand presenterar sig, gäller geometriska betydelsen af första derivatan, $\frac{dB}{d\Omega}$. Genom differentiation erhålla vi

$$dB = \frac{e^y + e^{-y}}{2} dy \text{ och } d\Omega = dx, \text{ således}$$

$$\frac{dB}{d\Omega} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Som nu $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$ är större halfaxeln i den ellips, på hvilken w för ögonblicket befinner sig, och enligt satsen om "isogonala förvandtskapen" w -curvan bildar samma vinkel med ellipsen, som z -curvan bildar med x -axel-rigtningen, så är $\frac{dB}{d\Omega} =$ produkten af ellipsens större halfaxel och trigonometriska tangenten för vinkeln mellan w -curvan och ellipsen.

Samma resultat erhålles äfven utan kännedom af den nyssnämnda satsen

på följande sätt: vi återinföra u och v , punktens rätlinga coordinater. Då är $u = \sqrt{B^2 + 1} \cdot \sin \Omega$ och $v = B \cos \Omega$.

Härur fås genom differentiation

$$\begin{aligned} du &= \sqrt{B^2 + 1} \cdot \cos \Omega \cdot d\Omega + \frac{B \sin \Omega}{\sqrt{B^2 + 1}} dB, \\ dv &= \cos \Omega dB - B \sin \Omega d\Omega, \end{aligned}$$

hvarur erhålles
$$\frac{dB}{d\Omega} = \sqrt{B^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{B^2 + 1} \cos \Omega dv + B \sin \Omega du}{\sqrt{B^2 + 1} \cos \Omega du - B \sin \Omega dv}.$$

Beteckna vi nu med u_1 och v_1 rätliniga coordinaterna för conjugatdiameters ändpunkt, hvilken samtidigt intages af $\cos z$, så är

$$u_1 = \sqrt{B^2 + 1} \cdot \cos \Omega, \text{ och } v_1 = -B \sin \Omega, \text{ således}$$

$$\frac{dB}{d\Omega} = \sqrt{B^2 + 1} \cdot \frac{u_1 dv - v_1 du}{u_1 du + v_1 dv}.$$

Betraktas nu du och dv såsom löpande coordinater för curvas tangent hänfödda till tangentpunkten såsom origo, så äro $u_1 dv - v_1 du$ och $u_1 du + v_1 dv$ proportionella mot de perpendiklar, som från en punkt på samma tangent dragas till ellipsens tangent och normal, och således $\frac{u_1 dv - v_1 du}{u_1 du + v_1 dv} =$ trigonometriska tangenten för vinkeln mellan w -curvas och ellipsens tangenter. Faktorn $\sqrt{B^2 + 1}$ är = ellipsens större axel. Således är geometriska betydelsen af $\frac{dB}{d\Omega}$ just den ofvan angifna.

Equationen för den w -curva, som motsvarar en rät linie genom origo beskrifven af z , är

$$B = \frac{e^{m\Omega} - e^{-m\Omega}}{2}.$$

Curvan definieras geometriskt derigenom, att den utgående från origo, i hvilken punkt den tangeras af z -linien, skär systemet af confokala ellipser under constant vinkel, hvars tangent är m . Curvan består af tvenne symmetriska i origo sammanhängande delar, hvilka motsvara de båda delar af den räta linien, som ligga på ömse sidor om origo. Vi behöfva derföre blott undersöka den ena af dessa brancher. Den skär axlarna i de punkter, för hvilka Ω är

$$= \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots. \text{ Häremot svarar } B = \frac{e^{m \frac{\pi}{2}} - e^{-m \frac{\pi}{2}}}{2}, \dots. \text{ Emedan dessa}$$

punkter tillika utgöra ändpunkter för ellipsernas axlar, kunna deras afstånd från origo med lätthet beräknas. De äro

$$\frac{e^{\frac{m\pi}{2}} + e^{-\frac{m\pi}{2}}}{2}, \frac{e^{m\pi} - e^{-m\pi}}{2}, \frac{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}}{2}, \frac{e^{2m\pi} - e^{-2m\pi}}{2} \dots\dots$$

Såsnart y eller $m\Omega$ blir någorlunda stort, blir $e^{m\Omega}$ så stort, att dess reciproka värde $e^{-m\Omega}$ bredvid detsamma blir försvinnande. Sålunda är till exempel redan för $y = 40$, $e^y = 22026$, 47. Detta gör att våra confocala ellipser rätt snart blifva mycket lika concentriska cirklar, tillfölje hvaraf vår w -curva i sina yttre delar blir alltmera lik en logarithmisk spiral, hvilken som bekant skär ett system af concentriska cirklar under constant vinkel.

Cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ motsvaras af curvan

$$B = \frac{e^{\sqrt{a^2 - \Omega^2}} - e^{-\sqrt{a^2 - \Omega^2}}}{2}.$$

Den består af fyra symmetriska sammanhängande delar motsvarande cirkelns fyra kvadranter. Utgår z från cirkelns skärningspunkt med positiva y -axeln, så utgår w från den punkt på samma axel, hvars afstånd från origo är $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$,

i hvilken punkt w -curvan bildar rät vinkel med ordnataxeln. $\Omega = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \dots$ ger liksom i föregående exempel curvans öfriga skärningspunkter med coordinataxlarne, men emedan Ω ej kan bli $> a$, beror antalet hvarf, hvarmed hvardera fjerdedelen af curvan omger origo, på storleken af z -cirkelns radie. Då slutligen Ω blir $= a$, skär curvan åter abscissaxeln, men denna skärningspunkt är i allmänhet icke ändpunkt för endera axeln i en ellips (så framt icke a just är $= \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \dots$), utan endast en punkt på den innersta ellipsen d. v. s. en punkt på räta linien mellan punkterna $+1$ och -1 . Samma ellips skäres af curvan under rät vinkel, så att, om a är $= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$, curvan i en af punkterna $+1$ eller -1 tangeras af reella storhetslinien, men annars skär den under rät vinkel i någon mellanliggande punkt. Följande fjerdedel af curvan är med den nu betraktade symmetrisk i anseende till abscissaxeln, hvaremot de båda återstående äro symmetriska med hvar sin af dessa båda i anseende till ordinataxeln. Passerar curvan genom punkterna $+1$ och -1 , eller, hvilket är

detsamma, är $a = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$, så blifva dessa punkter följaktligen återvändspunkter ¹⁾. Är deremot $a = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$, så kommer curvan att genomgå origo, i hvilken punkt då två af dess delar tangera hvarandra. Denna punkt anse vi emellertid ej vara en återvändspunkt, emedan hvardera delen af curvan har sin fortsättning på andra sidan om punkten.

Fig. 4 framställer de w -curvor, som motsvara cirkclarne

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \quad x^2 + y^2 = \pi^2 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2.$$

Man inser utan svårighet, huru de öfvergå i hvarandra, under det z -cirkeln radie växer.

Fig. 5 framställer de båda w -curvor, som motsvara räta linien $y = \frac{1}{2}x$ och cirkeln $x^2 + y^2 = (2\pi)^2$ beskrifna af z . Anmärkningsvärdt är, att dessa båda curvor skära hvarandra i 18 punkter (origo räknad för 2), ehuru motsvarande z -linier endast skära hvarandra i 2 punkter. Detta beror derpå, att åtskilliga punkter på cirkeln och den räta linien, ehuru de icke sammanfalla, dock hafva samma *sinus*. Fig. 6 tjänar i detta afseende till upplysning: de punkter, en på hvardera z -linien belägna, för hvilka sinus sammanfalla, äro der utmärkta med samma ziffra eller samma grekiska bokstaf, allteftersom equationen $\sin(a + bi) = \sin(a \pm 2m\pi + bi)$, eller $\sin(a + bi) = \sin(-a \pm (2m + 1)\pi - bi)$ varit grunden till sammanfallandet.

Då vi ha' $w = \operatorname{tg} z$, kunna vi betrakta de båda systemer af cirkclar, hvilka, såsom vi ofvan sett, i denna händelse motsvara systemerna af räta linier parallela med axlarna, som coordinat-system. Vi kunna då såsom coordinater för w betrakta t. ex. närmaste afståndet (B) från origo till den cirkel i systemet *med*

¹⁾ Detta öfverensstämmer med en sats, som förekommer i Crelles Journal Bd. 55 sid. 230, hvars *allmängültighet* vi emellertid måste förneka. Det skulle bli för vidlyftigt att här anföra densamma jemte dess bevis. För dem, som på anf. st. vilja taga notis om densamma, anmärka vi blott, att samma x -värde, som gör $F'(x) = 0$, ofta gör de följande derivatorna antingen oändliga eller $= 0$, hvarigenom antingen Taylorska theoremet blir oanvändbart, eller ock i den utvecklade serien åtskilliga termer försvinna *samtidigt*, så att man omöjligen utan kännedom om beskaffenheten af $F(x)$ kan afgöra hvilken af dem, som blir den första kvarstående. Ett upplysande exempel härpå erbjuder funktionen $w = z^n$, då n betyder ett helt positivt tal, och z beskriver en curva, som passerar genom origo (se "Om potenser etc." sidd. 7 och 8!).

gränspunkter (detta system motsvarar rätta linier parallela med x -axeln), på hvilken w befinner sig, samt afståndet (A) från origo till skärningspunkten för x -axeln och den del af en cirkel i systemet *utan* gränspunkter, hvars skärningspunkt med den förra cirkeln just intages af w . Då är

$$B = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \text{ och } A = \operatorname{tg} x.$$

Äfven detta slags coordinater innefattar rätliniga under sig såsom ett speciellt fall, nemligen det, då de punkter, som äro det ena cirkelsystemets gränspunkter och det andras skärningspunkter med sin radikal-axel, tänkas oändligt aflägsnade. Då öfvergå nemligen cirkelne till rätta linier och A och B blifva abscissa och ordinata för dessa liniers skärningspunkt.

Genom differentiation erhålla vi

$$dB = \frac{4 dy}{(e^y + e^{-y})^2}, \text{ och } dA = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$\text{hvarur } \frac{dB}{dA} = \frac{4 \cos^2 x}{(e^y + e^{-y})^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1 - B^2}{1 + A^2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Denna eqvation visar oss, om vi förutsätta den ofvan nämnda satsen om "isogonala förvandtskapen," geometriska betydelsen af första derivatan. Konstruktionen af tvenne linier, hvilkas qvadrater äro $1 - B^2$ och $1 + A^2$, erbjuder ingen svårighet, då ett sammanhörande par af cirkelar blifvit uppritade.

Genom ett förfaringssätt alldeles analogt med det, som vi använde vid sinusfunktionen, vinnes samma resultat:

$$\text{man har } u = \frac{A(1 - B^2)}{A^2 B^2 + 1}, \text{ och } v = \frac{B(1 + A^2)}{A^2 B^2 + 1},$$

hvarur erhålles

$$\frac{1 + A^2}{1 - B^2} \cdot \frac{dB}{dA} = \frac{(1 - A^2 B^2) dv - 2AB du}{(1 - A^2 B^2) du + 2AB dv}.$$

Nu äro eqvationerna för cirkelnes tangenter i w hänförda till tangeringspunkten såsom origo

$$(1 - A^2 B^2) v - 2AB u = 0, \text{ och } (1 - A^2 B^2) u + 2AB v = 0.$$

Således blifva båda membra i ofvanstående eqvation $= \operatorname{tg} \vartheta$, om ϑ betyder vinkeln mellan tangenterna till w -curvan och cirkeln i systemet *med* gränspunkter.

Den w -curva, som motsvarar en rät linie genom origo beskrifven af z , representeras genom eqvationen

$$A = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2m} \log \frac{1+B}{1-B} \right).$$

Denna curva består af två symmetriska delar, hvilka sammanhånga i origo. I denna punkt tangeras curvan af z -linien. Den skär båda cirkelsystemerna under constant vinkel och närmar sig punkterna $+i$ och $-i$ genom oändligt många hvarf kring dem beskrifna. För undersökningen af dess innersta, d. v. s. närmast en af dessa punkter, t. ex. punkten $+i$, belägna delar resonnera vi på följande sätt:

Då y blir någorlunda stort, blir B särdeles nära $= 1$, och radien, $\varrho = \frac{2}{e^{2y} - e^{-2y}}$, till motsvarande cirkel i systemet med gränspunkter mycket liten. På samma gång blir emellertid afståndet mellan samma cirkels medelpunkt och punkten $+i$, $B + \varrho - 1 = \frac{2e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}}$, försvinnande till och med i jämförelse med nyssnämnda lilla radie. Detta vill med andra ord säga, att de innersta cirkelne kunna betraktas såsom concentriska. Den lilla båge af en cirkel ur det andra systemet, som ligger emellan w och $+i$, kan på samma gång betraktas såsom rätlinig, emedan dessa cirkelns radie alltid är ≥ 1 . Den vinkel (ϑ), som samma båge bildar med ordinat-axeln, är $= 2x$. Vi ha' således, om vi betrakta ϱ och ϑ såsom polar-coordinater för w hänfödda till punkten $+i$ såsom pol och ordinat-axeln såsom fundamental-axel, approximativt

$$\varrho = 2 \cdot e^{-2y}, \text{ och } \vartheta = 2x.$$

Detta ger i vårt närvarande fall eqvationen för en logarithmisk spiral:

$$\varrho = 2 \cdot e^{-m\vartheta}.$$

Liksom då vi hade $w = \sin z$, måste, då w är $= \operatorname{tg} z$, i allmänhet w -curvorna skära hvarandra i flera punkter, än motsvarande z -curvor, till följe af eqvationen $\operatorname{tg}(a + bi) = \operatorname{tg}(a \pm m\pi + bi)$. Sålunda hafva t. ex. äfven nu de w -curvor, som motsvara räta linien $y = \frac{1}{2}x$ och cirkeln $x^2 + y^2 = (2\pi)^2$ beskrifna af z , 18 skärningspunkter. *Fig. 6* upplyser äfven detta fall, om man tänker sig företaga en lätt insedd omkastning af de grekiska bokstäfverna.

Analoga undersökningar öfver $w = \cos z$ och $w = \cotg z$ skulle lemna analoge resultater. Vi utelemna dem här och tillägga blott den anmärkningen, att orsaken, hvarföre såväl $w = \tg z = \frac{\sin z}{\cos z}$, som $w = \cotg z = \frac{\cos z}{\sin z}$, så snart z 's ordinata (y) blir någorlunda stor, närma sig till en af punkterna $\pm i$, är den, att då de confocala ellipser, hvilkas conjugat-diametrars ändpunkter intagas af $\sin z$ och $\cos z$, närma sig cirkelformen, blifva just dessa conjugat-diametrar i det närmaste lika stora och vinkelräta emot hvarandra.

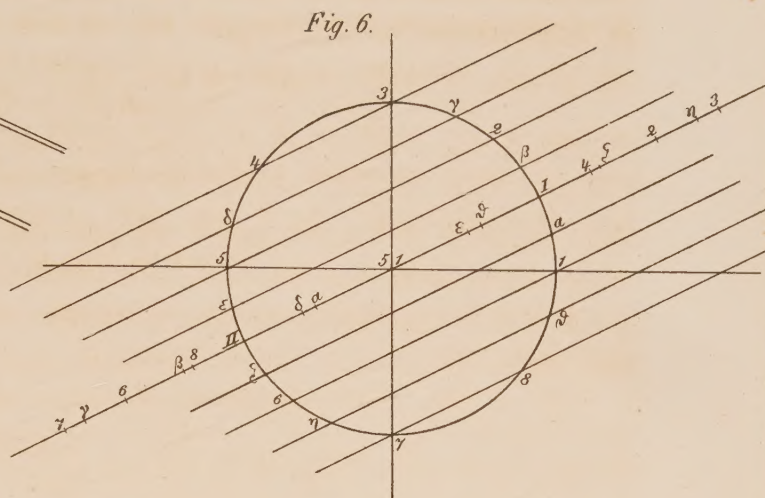


Fig. 6.

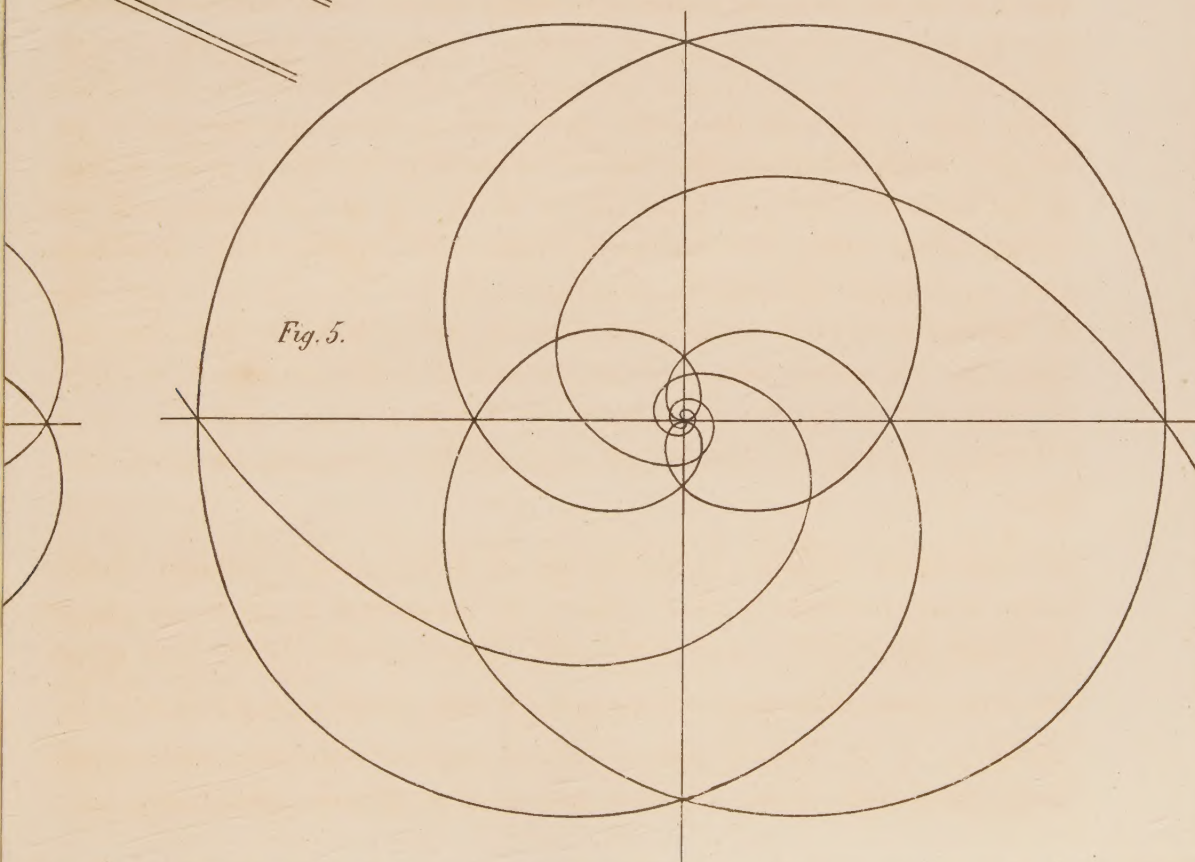


Fig. 5.

